Лекция 12

Интегрирование полных уравнений гидродинамики для баротропной атмосферы при использовании явных схем, неявных схем.

Цель: объяснение подходов решения уравнений для моделей на основе полных уравнений гидротермодинамики

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Постановка задачи

Полные уравнения гидродинамики для баротропной атмосферы возьмем в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+lv;$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-lu;$$
$$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}=-H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \qquad (2.1)$$

Перепишем уравнения таким образом, чтобы в левой части остались только производные по времени, т. е. в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial H}{\partial x}\right)+lv=f_u;$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial H}{\partial y}\right)-lu=f_v;$$
$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right)-H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=f_H. \qquad (2.2)$$

Методы аппроксимации

Методы	Аппроксимация	Условие устойчивости
Явные		
1. Односторонних разностей вперед	$X^{t+\delta t} - X^{t} = f^{t}\delta t$	Неустойчив
2. Центральных разностей	$X^{t+\delta t} - X^{t-\delta t} = f^{t}\delta t$	$c\dfrac{\delta t}{\delta s} < 1$
Явные, итерационные		
1. Эйлера с пересчетом	$X^{*} - X^{t} = f^{t}\delta t$ $X^{t+\delta t} - X^{t} = f^{*}\delta t$	$c\dfrac{\delta t}{\delta s} < 1$
2. Разностей назад	$X^{*} - X^{t-\delta t} = f^{t}\delta t$ $X^{t+\delta t} - X^{t} = f^{*}\delta t$	$c\dfrac{\delta t}{\delta s} < 0{,}8$
3. Центральных разностей (трапеций)	$X^{*} - X^{t-\delta t} = 2f^{t}\delta t$ $X^{t+\delta t} - X^{t} = \dfrac{1}{2}\left(f^{*} + f^{t}\right)\delta t$	$c\dfrac{\delta t}{\delta s} < \sqrt{2}$
Неявные		
1. Односторонних разностей назад	$X^{t+\delta t} - X^{t} = f^{t+\delta t}\delta t$	Абсолютно устойчив
2. Трапеций	$X^{t+\delta t} - X^{t} = \dfrac{1}{2}\left(f^{t+\delta t} + f^{t}\right)\delta t$	Абсолютно устойчив
3. Частично неявный	$X^{t+\delta t} - X^{t-\delta t} = 2\left(f_{1}^{t+\delta t} + f_{2}^{t}\right)\delta t$	Слабая неустойчивость для крупномасштабных волн

Примечание. X — любая функция; $f = \partial X/\partial t$; δt и δs — шаги по времени и горизонтальным координатам; c — максимальная скорость перемещения волн; f_1 и f_2 — нелинейная и линейная части f.

Прогностическая модель Д. Я. Пресмана [21]. В этой модели в качестве исходной принимается система уравнений (2.1). Конечно-разностная аппроксимация уравнений производится на основе схемы Лакса—Вендроффа. По этой схеме наряду с основными точками сетки с безразмерными координатами i, j, s рассматриваются промежуточные точки с полуцелыми значениями координат. Аппроксимация уравнений производится при целых s для промежуточных точек, а при полуцелых s — для основных. При этом недифференцируемые функции в какой-либо точке заменяются их средними значениями в четырех окружающих точках, производные по x и y вычисляются по четырем точкам, а производные по времени заменяются односторонними разностями вперед при целых s и центральными — при полуцелых s.

В соответствии со сказанным, получаем для целых s и полуцелых i, j:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{i+\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2},\ s} = \frac{2}{\delta t}\left(X_{i+\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2},\ s+\frac{1}{2}} - X_{i+\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2},\ s}\right);$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2},\ s} = \frac{1}{2\delta s}\left(X_{i+1,\ j,\ s} - X_{i,\ j,\ s} + X_{i+1,\ j+1,\ s} - X_{i,\ j+1,\ s}\right);$$

$$X_{i+\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2},\ s} = \frac{1}{4}\left(X_{i+1,\ j,\ s} + X_{i,\ j,\ s} + X_{i+1,\ j+1,\ s} + X_{i,\ j+1,\ s}\right), \tag{2.14}$$

для полуцелых s и целых i, j:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{i,\ j,\ s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\delta t}\left(X_{i,\ j,\ s+1} - X_{i,\ j,\ s}\right);$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{i,\ j,\ s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\delta s}\left(X_{i+\frac{1}{2},\ j-\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2},\ j-\frac{1}{2}} + X_{i+\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2}}\right)_{s+\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

.

Методы решения

Теперь рассмотрим другой подход к интегрированию уравнений, при котором часть или все члены прогностических уравнений относятся не только к исходному, но и к последующему моменту времени. В результате мы получим неявную схему. Неявные схемы по сравнению с явными обладают большей вычислительной устойчивостью, что в свою очередь позволяет учитывать в соответствующих моделях различные эффекты без потери устойчивости счета.

Существует много разных вариантов неявных схем. Некоторые сведения о них приведены в табл. 5.1. На практике широкое применение нашел метод трапеций. Так как значения $f^{t+\delta t}$ не могут быть вычислены непосредственно по исходным данным, то для реализации таких схем применяется метод последовательных приближений. В качестве $f^{t+\delta t}$ в первом приближении принимаются значения f^t, а во втором — значения f, вычисленные по данным, полученным в первом приближении, и т. д.

Методы решения

$$u^1-\frac{l\,\delta t}{2}v^1=u^0+\frac{l\,\delta t}{2}v^0-\frac{\delta t}{2}(F_u^1+F_u^0);$$

$$v^1+\frac{l\,\delta t}{2}u^1=v^0-\frac{l\,\delta t}{2}u^0-\frac{\delta t}{2}(F_v^1+F_v^0),$$

где F^1 и F^0 — значения F в конечный и начальный моменты времени.

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$u^1=\frac{1}{1+\varepsilon^2}\left\{(1-\varepsilon^2)u^0+l\,\delta t v^0-\frac{\delta t}{2}\left[(F_u^1+F_u^0)+\varepsilon(F_v^1+F_v^0)\right]\right\};$$

$$v^1=\frac{1}{1+\varepsilon^2}\left\{(1-\varepsilon^2)v^0-l\,\delta t u^0-\frac{\delta t}{2}\left[(F_v^1+F_v^0)-\varepsilon(F_u^1+F_u^0)\right]\right\}, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon=l\delta t/2$.

Третье уравнение системы (2.1) перепишем в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\left(\frac{\partial uH}{\partial x}+\frac{\partial vH}{\partial y}\right)=-F_H.$$

Заменив производную по времени конечными разностями, а функцию F_H полусуммой ее значений в начальный и конечный моменты времени, получим

$$H^1=H^0-\frac{\delta t}{2}(F_H^1+F_H^0). \quad (3.2)$$

Методы решения

Соотношения (3.1) и (3.2) и служат основными прогностическими уравнениями модели. Так как в правых частях этих соотношений стоят неизвестные функции F^1_u, F^1_v и F^1_H, то используется метод последовательных приближений. В соответствии с этим методом значения u^1, v^1 и H^1 для последующего $\nu+1$-го приближения определяются с помощью выражений:

$$(u^1)^{\nu+1} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\Big\{(1-\varepsilon^2)\,u^0 + l\,\delta t v^0 - \frac{\delta t}{2}\Big[(F^1_u)^\nu + F^0_u + \varepsilon\Big((F^1_v)^\nu + F^0_v\Big)\Big]\Big\};$$

$$(v^1)^{\nu+1} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}\Big\{(1-\varepsilon^2)\,v^0 - l\,\delta t u^0 - \frac{\delta t}{2}\Big[(F^1_v)^\nu + F^0_v + \varepsilon\Big((F^1_u)^\nu + F^0_u\Big)\Big]\Big\};$$

$$(H^1)^{\nu+1} = H^0 - \frac{\delta t}{2}\left[(F^1_H)^\nu + F^0_H\right]. \qquad (3.3)$$

В качестве краевого условия применяется условие (1.3), а в качестве начального приближения для функций F^1 — их значение в начальный момент времени, т. е. величины F^0.

Методы решения

Наряду с требованием устойчивости счета при построении разностных схем должны выполняться и другие требования, обеспечивающие соответствие разностного уравнения исходному дифференциальному. Среди этих требований важнейшим является выполнение в разностных схемах тех законов сохранения различных величин, которым удовлетворяют дифференциальные уравнения задачи. Для баротропной модели атмосферы, описываемой системой уравнений (2.1) с краевыми условиями (1.3), одной из таких сохраняемых величин является сумма кинетической $K=(u^2+v^2)/2$ и потенциальной $\Phi=gH$ энергий в области интегрирования. Покажем, что эта величина остается постоянной. С этой целью умножим первое уравнение системы (2.1) на u, второе на v, третье на g и результаты сложим. Тогда получим

Методы решения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2+v^2}{2}+gH\right)+u\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}+gH\right)+v\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2}{2}+gH\right)=$$

$$=-g\left(u\,\frac{\partial H}{\partial x}+v\,\frac{\partial H}{\partial y}+H\,\frac{\partial u}{\partial x}+H\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+v^2}{2}+\Phi\right)=-\left(\frac{\partial u\Phi}{\partial x}+\frac{\partial v\Phi}{\partial y}\right).$$

Проинтегрируем теперь обе части уравнения по площади S, ограниченной кривой Γ, на которой удовлетворяются условия (1.3)

$$\iint\limits_{(S)}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+v^2}{2}+\Phi\right)dS=-\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial u\Phi}{\partial x}+\frac{\partial v\Phi}{\partial y}\right)dS.$$

Методы решения

В силу краевых условий (1.3) интеграл в правой части последнего равенства обращается в нуль. Это легко показать для частного случая, когда граница Г представляет собой квадрат со стороной $2a$, вписанный в окружность экватора на плоскости карты. Тогда

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\partial u\Phi}{\partial x}\right)dx\,dy=\int_{-a}^{a}\left\{\int_{-a}^{a}\frac{\partial u\Phi}{\partial x}\,dx\right\}dy=\int_{-a}^{a}(u\Phi)\Big|_{-a}^{a}dy=0.$$

В результате получим

$$\iint_{(S)}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+v^2}{2}+\Phi\right)dS=0.$$

Отсюда следует, что

$$\iint_{(S)}\left(\frac{u^2+v^2}{2}+\Phi\right)dS=\text{const}.$$

Методы решения

Мы можем теперь найти решение системы (1.14) относительно u^1, v^1 и H^1. С помощью первых двух уравнений системы получаем:

$$u^1 = \frac{1}{1+(l\,\delta t)^2}\left[u^0 + l\,\delta t v^0 - \delta t\left(F_u + l\,\delta t F_v\right)\right];$$

$$v^1 = \frac{1}{1+(l\,\delta t)^2}\left[v^0 - l\,\delta t u^0 - \delta t\left(F_v - l\,\delta t F_u\right)\right]. \qquad (1.15)$$

С учетом этих соотношений можно найти выражение для дивергенции. Найденное выражение подставим в третье уравнение системы (1.14). Выделив из функций F_u и F_v производные $\frac{\partial H^1}{\partial x}$ и $\frac{\partial H^1}{\partial y}$ и вернувшись к функциям B_u и B_v, получаем следующее уравнение для искомой функции H^1:

$$\left(\Delta + a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\left(H^1 - H^0\right) = A, \qquad (1.16)$$

где a_1, a_2 и a_3 — коэффициенты, A — комбинация функций A_T, B_u, B_v, а также начальных значений u^0, v^0 и H^0.

Решив уравнение (1.16), получим будущие значения H^1. Теперь с помощью (1.15) определяются будущие значения u^1 и v^1. Далее может быть сделан следующий шаг по времени и т. д.

Вопросы для самоконтроля:

1. Выполнение закона сохранения в разностных схемах;
2. Примеры конечно разностных схем;
3. Модель Прессмана.